Hessen – Grundkurs Mathematik
2019 – B1: Analysis (WTR)

Das in Material 1 im Schrägbild dargestellte Werkstück hat eine rechteckige Grundfläche und dazu senkrecht verlaufende Seitenflächen. Es besteht aus zwei unterschiedlich gefärbten Kunststoffen. Der obere Teil ist heller, der untere dunkler gefärbt.
In Material 2 ist eine Querschnittsfläche des Werkstücks abgebildet.

1 Die obere Randkurve der Querschnittsfläche kann für $-2 \le x \le 10$ durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}016x^3 - 0{,}18x^2 + 0{,}2x + 5$ beschrieben werden (alle Angaben in cm).

1.1 Berechnen Sie, auch unter Berücksichtigung der Randwerte des Intervalls, an welcher Stelle das Werkstück am höchsten ist, und geben Sie seine maximale Höhe an. **(8 BE)**

1.2 Berechnen Sie den Inhalt A der gesamten Querschnittsfläche des Werkstücks. **(4 BE)**

2 Die obere Randkurve des unteren, dunkler gefärbten Teils der Querschnittsfläche kann für $-2 \le x \le 10$ durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = (1{,}5 \cdot x + 4{,}5) \cdot e^{-0{,}3x}$ beschrieben werden (alle Angaben in cm).

2.1 Mithilfe des Formansatzes $G(x) = (a \cdot x + b) \cdot e^{-0{,}3x}$ soll eine Stammfunktion G der Funktion g ermittelt werden.
Berechnen Sie die Ableitungsfunktion G' der Funktion G.
Ermitteln Sie durch Vergleich der Funktionsterme von G' und g eine Stammfunktion G von g.
$\left[\text{zur Kontrolle: } G(x) = \left(-5x - \frac{95}{3}\right) \cdot e^{-0{,}3x}\right]$ **(6 BE)**

2.2 Bestimmen Sie das Volumen des oberen, heller gefärbten Teils des Werkstücks. **(5 BE)**

2.3 Auf der rechten Seite wird ein Teil des Werkstücks durch einen ebenen Schnitt abgetrennt. Die Schnittebene E verläuft dabei senkrecht zur Querschnittsfläche und durch die Punkte $(9|0)$ und $(10|5)$.
Erläutern Sie eine Vorgehensweise, mit der man ermitteln kann, um wie viel Kubikzentimeter das in Aufgabe 2.2 bestimmte Volumen des oberen, heller gefärbten Werkstückteils dadurch kleiner wird. **(5 BE)**

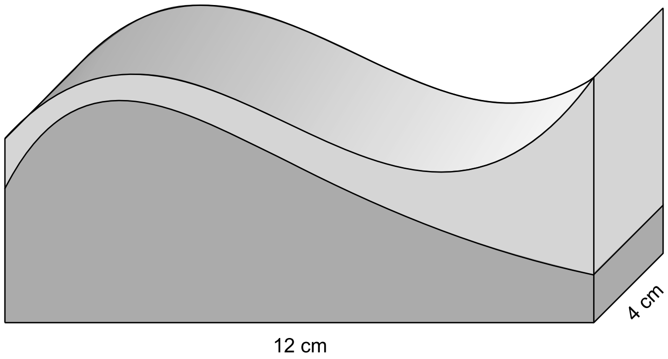
2.4 Für $x < -2$ hat der Graph von G einen relativen Extrempunkt. Berechnen Sie diesen nur anhand der notwendigen Bedingung und begründen Sie unter Verwendung der Abbildung in Material 2, dass es sich um einen relativen Tiefpunkt handeln muss. **(5 BE)**

3 Die Funktion f gehört zu der Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = k \cdot x^3 - 0{,}18x^2 + 0{,}2x + 5$ für $k > 0$.

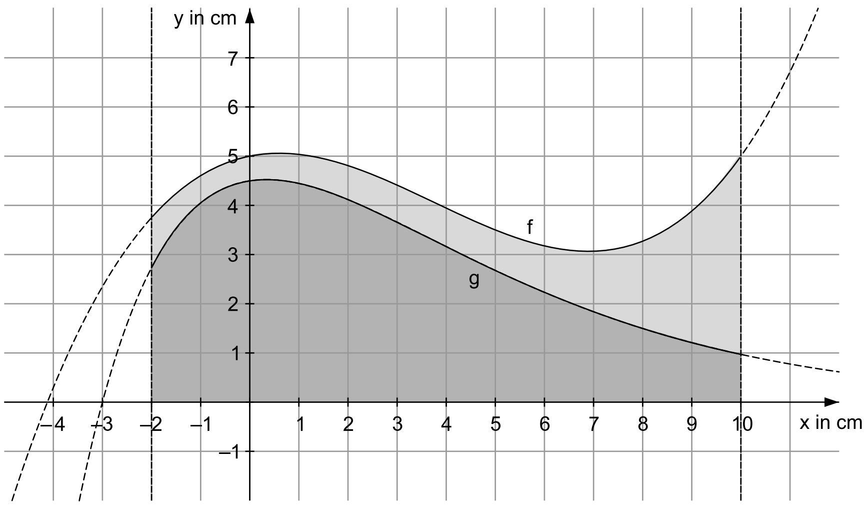
3.1 Berechnen Sie die Wendestelle x_W des Graphen von f_k in Abhängigkeit von k.
Hinweis: Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.
$\left[\text{zur Kontrolle: } x_W(k) = \frac{3}{50k}\right]$ **(5 BE)**

3.2 Untersuchen Sie, wie sich die Lage von $x_W(k)$ für $k \to \infty$ ändert. **(2 BE)**

Material 1



Material 2



Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1.1

- Gesucht ist ein Extremwert, genauer ein Maximum der Funktion f.
- An Randpunkten eines Intervalls können auch Extremwerte erreicht werden. Dort muss die Steigung nicht den Wert null haben.

Teilaufgabe 1.2

- Nutzen Sie den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Teilaufgabe 2.1

- Zur Berechnung unbekannter Parameter kann das Verfahren eines Koeffizientenvergleichs benutzt werden:
  Aus $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ kann $a = c$ und $b = d$ geschlossen werden.

Teilaufgabe 2.2

- Verwenden Sie zur Berechnung der Differenzfläche den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.
- Das Volumen berechnet sich durch Grundfläche mal Breite.

Teilaufgabe 2.3

- Eine Verlagerung des Problems vom Raum in die Ebene ist möglich. Sie betrachten dann eine Gerade statt der Schnittebene.

Teilaufgabe 2.4

- Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunkts ist $G'(x) = 0$.
- g ist die 1. Ableitungsfunktion von G. Der Graph von g liegt im Material 2 vor. Sein Verhalten „rund“ um die berechnete Extremstelle gibt Aufschluss über die Existenz eines Tiefpunkts.

Teilaufgabe 3.1

- Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunkts ist $f''(x) = 0$.

Teilaufgabe 3.2

- Welche Stellung nimmt der Parameter k im Lösungsterm für x_W ein?

Lösung

1.1 Es ist das Maximum der Funktion f im angegebenen Intervall zu bestimmen.
Notwendige Bedingung für die Existenz von Extrempunkten: $f'(x)=0$

Die erste Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion ist zu bilden. Die Anwendung mehrerer Regeln (Summen-Differenzregel, konstante Faktorregel, Potenzregel und konstante Summandenregel) führt zu der Funktion:

$$f'(x)=0{,}048x^2-0{,}36x+0{,}2$$

Mit der notwendigen Bedingung ergibt sich folgende Gleichung:

$$0{,}048x^2-0{,}36x+0{,}2=0$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung erfolgt mit der p/q-Formel.

1. Schritt: Division durch 0,048

$$x^2-\frac{15}{2}x+\frac{25}{6}=0$$

2. Schritt: $p=-\frac{15}{2}$ und $q=\frac{25}{6}$

3. Schritt: Berechnung der beiden Ergebnisse mit der Formel

$$x_1=\frac{15}{4}+\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2-\frac{25}{6}}\approx 6{,}896$$

$$x_2=\frac{15}{4}-\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2-\frac{25}{6}}\approx 0{,}604$$

4. Schritt: Interpretation der beiden Resultate
Beide Werte liegen im angegebenen Intervall.

Es gilt nun, die notwendige Bedingung $f''(x_i)\neq 0$ zu überprüfen.

Mit den o. a. Regeln kann die 2. Ableitungsfunktion bestimmt werden:

$$f''(x)=0{,}096x-0{,}36$$

Mit der Berechnung der Funktionswerte $f''(x_1)\approx 0{,}302$ und $f''(x_2)\approx -0{,}302$ ergeben sich folgende Resultate:

- Wegen $0{,}302>0$ liegt an der Stelle x_1 ein Tiefpunkt vor.
- Wegen $-0{,}302<0$ liegt an der Stelle x_2 ein Hochpunkt vor.

Es gibt damit wegen $f(x_2)\approx 5{,}059$ den Hochpunkt $H(0{,}604\,|\,5{,}059)$.

Dieser Hochpunkt muss allerdings noch nicht die maximale Höhe beschreiben, da Randpunkte nicht durch die Methode der Differenzialrechnung untersucht werden können. Hier, an den Randpunkten, kann es durchaus die höchsten Funktionswerte geben. Jedoch hat hier nicht notwendigerweise die Steigung den Wert null.

Somit gilt es noch die Funktionswerte an den beiden Rändern des Intervalls zu berechnen:

$$f(-2)=3{,}752 \text{ und } f(10)=5$$

Damit liegt die maximale Höhe des Werkstücks bei $x\approx 0{,}604$ und sie beträgt $h\approx 5{,}059$.