Hessen – Leistungskurs Mathematik
2019 – B1: Analysis (WTR)

1 Eine Flasche Wasser wird in einem Kühlschrank auf 8 °C abgekühlt. An einem Sommertag wird diese entnommen und in ein Zimmer mit 30 °C Raumtemperatur gestellt. 10 Minuten später hat sich das Wasser bereits auf 21,9 °C erwärmt. Im Modell wird davon ausgegangen, dass sich die Raumtemperatur nicht verändert.

Der Temperaturverlauf der Erwärmung des Wassers kann durch die Funktion w beschrieben werden mit:

$w(t) = T_R - (T_R - T_0) \cdot e^{-kt}$

Dabei bedeutet:
t Zeit in Minuten nach Entnahme aus dem Kühlschrank
$w(t)$ Temperatur des Wassers in °C zum Zeitpunkt t
T_0 Temperatur des Wassers in °C zum Zeitpunkt $t = 0$
T_R Raumtemperatur in °C

1.1 Nennen Sie die Werte für die Parameter T_R und T_0.
Ermitteln Sie auf vier Nachkommastellen gerundet den Wert für den Parameter k und geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung w(t) an.
[zur Kontrolle: $k \approx 0{,}1$] **(4 BE)**

Verwenden Sie im Folgenden die Funktionsgleichung $w(t) = 30 - 22 \cdot e^{-0{,}1t}$.

1.2 Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Temperatur des Wassers in den ersten 10 Minuten nach Entnahme aus dem Kühlschrank zunimmt. **(2 BE)**

1.3 Berechnen Sie den Wert des Terms $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} w(t)\,dt$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **(4 BE)**

1.4 Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms, dass gilt: $\lim_{t \to \infty} w(t) = 30$
Erläutern Sie diesen Grenzwert im Sachzusammenhang. **(3 BE)**

1.5 Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich das Wasser zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank erwärmt, und berechnen Sie, wann sich diese Erwärmungsgeschwindigkeit halbiert hat.
Zeigen Sie, dass gemäß der Modellierung durch die Funktion w die Erwärmungsgeschwindigkeit im Zeitverlauf abnimmt, jedoch nie null wird. **(9 BE)**

1.6 Eine Funktion f beschreibt ein begrenztes Wachstum, wenn die Wachstumsgeschwindigkeit proportional zur Differenz aus der Sättigungsgrenze S und dem aktuellen Bestand ist, d. h., wenn $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$ gilt.
Zeigen Sie unter Verwendung des Kontrollergebnisses für k aus Aufgabe 1.1, dass die Funktion w ein begrenztes Wachstum beschreibt.
Deuten Sie den Wert für k im Sachzusammenhang. **(4 BE)**

2 Gegeben ist die Funktionenschar f_n mit $f_n(x) = (x + 1)^n \cdot e^x$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$ gilt.
Im Material sind zwei ausgewählte Graphen der Schar abgebildet.

2.1 Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar dieselbe Nullstelle und denselben y-Achsenabschnitt besitzen, und geben Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an. **(3 BE)**

2.2 Die Graphen von f_n nähern sich für $x \to -\infty$ der x-Achse an.
Begründen Sie dieses Verhalten anhand des Funktionsterms.

Die beiden im Material abgebildeten Graphen unterscheiden sich bei der Annäherung an die x-Achse.
Erklären Sie diesen Unterschied anhand des Funktionsterms. **(5 BE)**

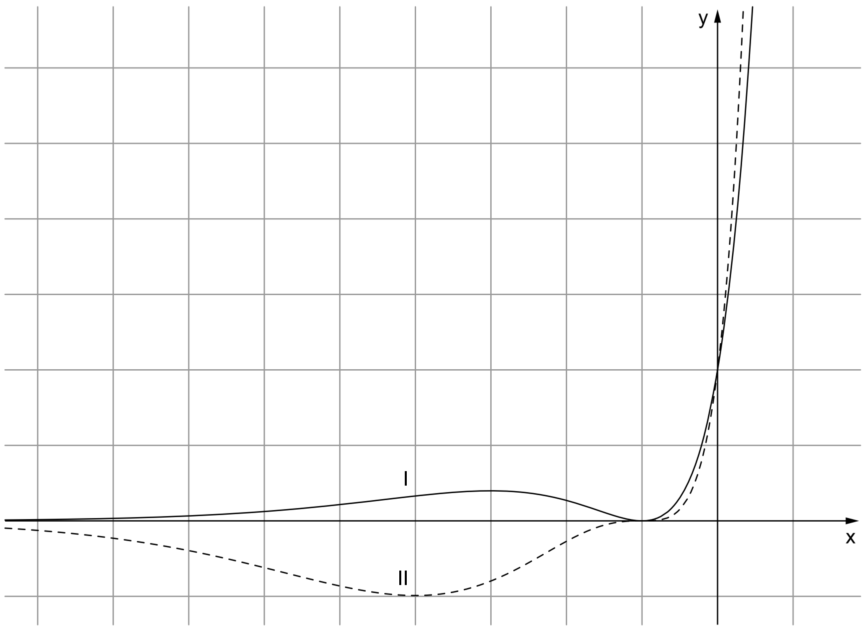
2.3 Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f_n' und zeigen Sie, dass gilt:
$f_n'(x) = (x + 1 + n) \cdot f_{n-1}(x)$ **(4 BE)**

2.4 Berechnen Sie die möglichen Extremstellen von f_n. Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist hierbei ausreichend.

Geben Sie die Skalierung der Achsen im Material an.
Bestimmen Sie für die beiden Graphen I und II im Material die zugehörigen Werte des Parameters n. **(6 BE)**

2.5 An der Stelle $x = -1$ besitzen die Graphen der Funktionenschar f_n für gerade Werte von n einen Extrempunkt und für ungerade Werte von n einen Sattelpunkt.
Begründen Sie diese Aussage. **(6 BE)**

Material



Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1.1

- Bestimmen Sie die Parameterwerte T_R und T_0 aus dem Text und setzen Sie diese Werte in die Funktionsgleichung ein.

Teilaufgabe 1.2

- Verwenden Sie die Prozentrechnung und den Dreisatz.

Teilaufgabe 1.3

- Es geht um ein Flächenintegral bzw. einen Mittelwert (arithmetisches Mittel).

Teilaufgabe 1.4

- Nutzen Sie die Grenzwertsätze und Eigenschaften von e-Funktionen für $t \to \infty$.

Teilaufgabe 1.5

- Die Geschwindigkeitsfunktion ist die 1. Ableitungsfunktion.
- Auch hier benötigen Sie Eigenschaften von e-Funktionen für $t \to \infty$.

Teilaufgabe 1.6

- Berechnen Sie die rechte Seite der Differenzialgleichung mit der Funktion w anstelle von f.

Teilaufgabe 2.1

- Eine Bedingungsgleichung für die Existenz von Nullstellen lautet $f(x) = 0$.
- Eine Bedingungsgleichung für Schnittpunkte mit der y-Achse ist $x = 0$.

Teilaufgabe 2.2

- Es liegt ein Produktterm vor. Daher gilt es, die Grenzwertbetrachtung für die jeweiligen Faktorenterme zunächst getrennt vorzunehmen.

Teilaufgabe 2.3

- Wenden Sie die Ableitungsregeln an und verwenden Sie die Gleichheit $z^n = z^1 \cdot z^{n-1}$.

Teilaufgabe 2.4

- Es gilt, die notwendige Bedingung für die Existenz von Extremstellen anzuwenden.
- Mit den Resultaten und den Informationen des Materials können die Fragen nach der Skalierung und dem Parameterwert n beantwortet werden.

Teilaufgabe 2.5

- Die Lösungsidee folgt dem Modell des Vorzeichenwechsels der Steigung.

Lösung

1.1 Es sind die Parameter T_R und T_0 in der Funktionsgleichung $w(t) = T_R - (T_R - T_0) \cdot e^{-kt}$ zu bestimmen.

T_0 ist der Anfangswert der Wassertemperatur zu Beginn der Messung des Temperaturverlaufs: $T_0 = 8$ °C

T_R ist die Raumtemperatur, die im Verlauf der Messung konstant bleibt: $T_R = 30$ °C

Die Funktionsgleichung von w(t) enthält neben den beiden, schon bestimmten, Parametern T_R und T_0 auch noch den Parameter k. Für seine Berechnung bedarf es noch einer zusätzlichen Angabe. Dies erfolgt mit der Information:
Nach 10 Minuten gilt $w(10) = 21{,}9$ °C.

Für die Berechnung von k ergibt sich damit folgende Gleichung:

$$21{,}9 = 30 - (30 - 8) \cdot e^{-k \cdot 10}$$
$$21{,}9 = 30 - 22 \cdot e^{-10 \cdot k}$$
$$-8{,}1 = -22 \cdot e^{-10 \cdot k}$$
$$\frac{8{,}1}{22} = e^{-10 \cdot k}$$
$$\ln\left(\frac{8{,}1}{22}\right) = -10 \cdot k$$
$$k \approx 0{,}0999$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:

$$w(t) = 30 - 22 \cdot e^{-0{,}0999 \cdot t}$$

1.2 Ansatz zur Prozentrechnung:

$$\frac{w(10) - w(0)}{w(0)} = \frac{x}{100}$$
$$\frac{13{,}9}{8} = \frac{x}{100}$$
$$1{,}7375 = \frac{x}{100}$$
$$x \approx 174$$

Die Temperatur des Wassers nimmt in den ersten 10 Minuten, nachdem das Wasser aus dem Kühlschrank entnommen wurde, um ca. 174 % zu.

1.3 Das Integral $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} w(t)\,dt$ beschreibt das arithmetische Mittel der Temperatur im Intervall [0; 10] (das Integral „summiert“ alle Temperaturwerte und dieser Wert wird dann durch die „Anzahl“ der Messwerte (10) geteilt).

$$\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} (30 - 22 \cdot e^{-0{,}1t})\,dt = \frac{1}{10} \cdot \left[30t + 220 \cdot e^{-0{,}1t}\right]_0^{10} = \frac{1}{10} \cdot (300 + 220 \cdot e^{-1} - 220)$$
$$\approx 16{,}09$$

In den ersten 10 Minuten, nachdem das Wasser aus dem Kühlschrank entnommen wurde, beträgt die durchschnittliche Wassertemperatur etwa 16,1 °C.